

Présentation ANS6

Parametrization and smooth approximation of surface triangulations

Daniel Déchelotte

dechelot@loria.fr

Loria

Pour commencer, une évidence

Toutes les paramétrisations ne sont pas équivalentes !

Quelques points pour lesquels il faut trouver une paramétrisation lisse

x_4^+

x_3^+

x_1^+

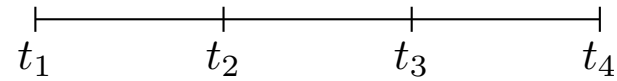
x_2^+

Pour commencer, une évidence

Toutes les paramétrisations ne sont pas équivalentes !

Quelques points pour lesquels il faut trouver une paramétrisation lisse ?

Paramétrisation uniforme :



x_4
+

x_3
+

x_1
+

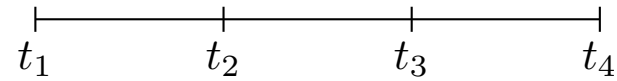
x_2
+

Pour commencer, une évidence

Toutes les paramétrisations ne sont pas équivalentes !

Quelques points pour lesquels il faut trouver une paramétrisation lisse ?

Paramétrisation uniforme :

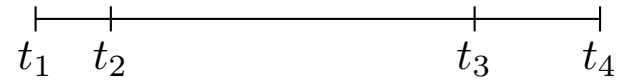


x_4

?

Paramétrisation déconseillée...

x_3



x_1

x_2

Pour commencer, une évidence

Toutes les paramétrisations ne sont pas équivalentes !

Quelques points pour lesquels il faut trouver une paramétrisation lisse

x_1
+

x_2
+

x_4
+

x_3
+

?

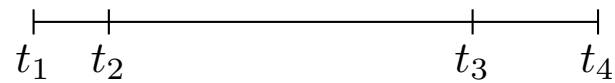
?

?

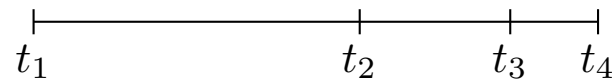
Paramétrisation uniforme :



Paramétrisation déconseillée...



Paramétrisation dite « longueur de corde » :



Pour commencer, une évidence

Toutes les paramétrisations ne sont pas équivalentes !

Quelques points pour lesquels il faut trouver une paramétrisation lisse

x_1
+

x_2
+

x_4
+

x_3
+

?

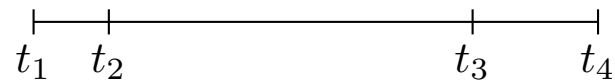
?

?

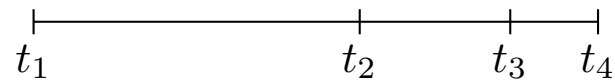
Paramétrisation uniforme :



Paramétrisation déconseillée...



Paramétrisation dite « longueur de corde » :



C'est **celle-là** que l'on va étendre aux surfaces triangulées.

Paramétrisation d'une surface triangulée

- On met en évidence les sommets internes (u_1, \dots, u_{n_i}) et les sommets du contour de la surface (u_{n_i+1}, \dots, u_N)
- On répartit les sommets du contour sur un polygone convexe
- On positionne chaque sommet interne en fonction de ses voisins :

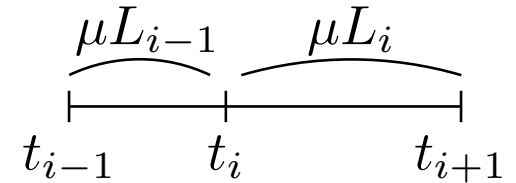
$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{i,j} \mathbf{u}_j \text{ avec } \begin{cases} \lambda_{i,j} > 0 & \text{si } p_j \in N_i \\ \lambda_{i,j} = 0 & \text{si } p_j \notin N_i \\ \sum \lambda_{i,j} = 1 \end{cases}$$

⇒ Il faut trouver des $\lambda_{i,j}$ de telle sorte que les $\mathbf{u}_i = [u_i; v_i]$ reproduisent au mieux la topologies des $\mathbf{x}_i = [x_i; y_i; z_i]$.

Inspirons-nous du cas 1D

« Longueur de corde » : $\frac{t_{i+1}-t_i}{t_i-t_{i-1}} = \frac{L_i}{L_{i-1}}$.

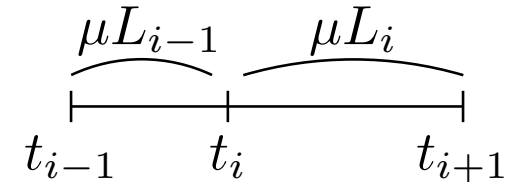
Plusieurs réécritures sont possibles :



Inspirons-nous du cas 1D

« Longueur de corde » : $\frac{t_{i+1}-t_i}{t_i-t_{i-1}} = \frac{L_i}{L_{i-1}}$.

Plusieurs réécritures sont possibles :

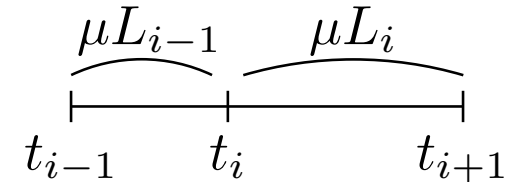


1. On fixe t_1 et μ , et $\forall i \in [2, N]$ $t_{i+1} = t_i + \mu L_i$

Inspirons-nous du cas 1D

« Longueur de corde » : $\frac{t_{i+1}-t_i}{t_i-t_{i-1}} = \frac{L_i}{L_{i-1}}$.

Plusieurs réécritures sont possibles :



1. On fixe t_1 et μ , et $\forall i \in [2, N]$ $t_{i+1} = t_i + \mu L_i$

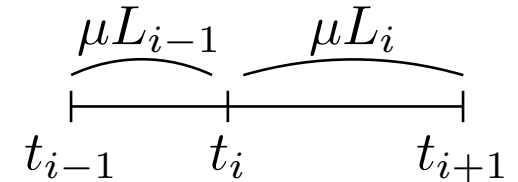
2. On fixe t_1 et t_N , et $\forall i \in [2, N-1]$ $t_i = \lambda_{i,1}t_{i-1} + \lambda_{i,2}t_{i+1}$

$$\text{avec } \lambda_{i,1} = \frac{L_i}{L_{i-1} + L_i} \text{ et } \lambda_{i,2} = \frac{L_{i-1}}{L_{i-1} + L_i}$$

Inspirons-nous du cas 1D

« Longueur de corde » : $\frac{t_{i+1}-t_i}{t_i-t_{i-1}} = \frac{L_i}{L_{i-1}}$.

Plusieurs réécritures sont possibles :



1. On fixe t_1 et μ , et $\forall i \in [2, N]$ $t_{i+1} = t_i + \mu L_i$

2. On fixe t_1 et t_N , et $\forall i \in [2, N-1]$ $t_i = \lambda_{i,1} t_{i-1} + \lambda_{i,2} t_{i+1}$

$$\text{avec } \lambda_{i,1} = \frac{L_i}{L_{i-1} + L_i} \text{ et } \lambda_{i,2} = \frac{L_{i-1}}{L_{i-1} + L_i}$$

3. On fixe t_1 et t_N , on pose $w_i = \frac{1}{L_i}$, $s_1 = t_1$ et $s_N = t_N$. Les t_2, \dots, t_{N-1} minimisent la fonction :

$$F(s_2, \dots, s_{N-1}) = \sum_{i=1}^{N-1} w_i (s_{i+1} - s_i)^2$$

Moindres carrés pondérés

- On fixe les points du contour $\mathbf{u}_{n_i+1}, \dots, \mathbf{u}_N$ et on cherche les $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ qui minimisent

$$F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \sum_{(i,j) \in E} w_{i,j} \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2.$$

Moindres carrés pondérés

- On fixe les points du contour $\mathbf{u}_{n_i+1}, \dots, \mathbf{u}_N$ et on cherche les $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ qui minimisent

$$F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \sum_{(i,j) \in E} w_{i,j} \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2.$$

- Pour les $w_{i,j}$, on choisit $1/\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^q$

Moindres carrés pondérés

- On fixe les points du contour $\mathbf{u}_{n_i+1}, \dots, \mathbf{u}_N$ et on cherche les $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ qui minimisent

$$F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \sum_{(i,j) \in E} w_{i,j} \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2.$$

- Pour les $w_{i,j}$, on choisit $1/\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^q$
- Les solutions sont

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j:(i,j) \in E} \lambda_{i,j} \mathbf{u}_j \quad \text{où} \quad \lambda_{i,j} = \frac{w_{i,j}}{\sum_{j:(i,j) \in E} w_{i,j}}$$

Moindres carrés pondérés

- On fixe les points du contour $\mathbf{u}_{n_i+1}, \dots, \mathbf{u}_N$ et on cherche les $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ qui minimisent

$$F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \sum_{(i,j) \in E} w_{i,j} \|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\|^2.$$

- Pour les $w_{i,j}$, on choisit $1/\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^q$
- Les solutions sont

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j:(i,j) \in E} \lambda_{i,j} \mathbf{u}_j \quad \text{où} \quad \lambda_{i,j} = \frac{w_{i,j}}{\sum_{j:(i,j) \in E} w_{i,j}}$$

- Les performances sont meilleures qu'avec la paramétrisation uniforme ($w_{i,j} = \text{cste} \Leftrightarrow \lambda_{i,j} = 1/d_i$), mais il reste des oscillations indésirables.

Respect de la topologie

- Dans le cas 1D, la paramétrisation « longueur de corde » a la propriété suivante :

Si les points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ de \mathbb{R}^3 sont alignés suivant une droite, et si on considère une paramétrisation uniforme t_1, \dots, t_N de ces points, il existe une fonction affine $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\phi(\mathbf{x}_i) = (t_i, 0, 0)$.

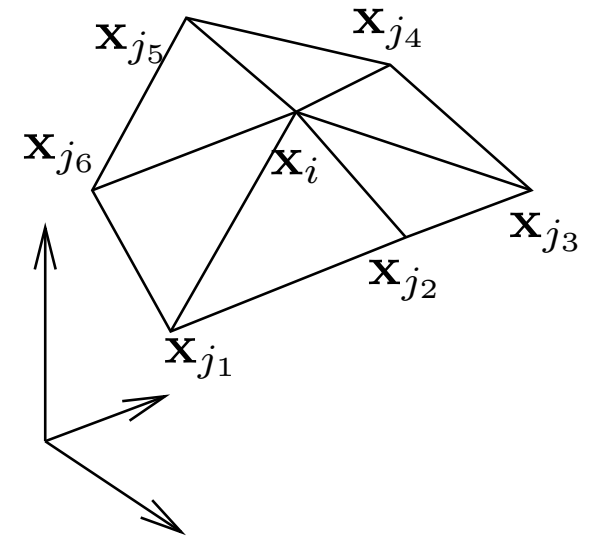
Respect de la topologie

- Dans le cas 1D, la paramétrisation « longueur de corde » a la propriété suivante :
Si les points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ de \mathbb{R}^3 sont alignés suivant une droite, et si on considère une paramétrisation uniforme t_1, \dots, t_N de ces points, il existe une fonction affine $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\phi(\mathbf{x}_i) = (t_i, 0, 0)$.
- On souhaite étendre cette propriété au cas 2D : si la surface triangulée est contenue dans un plan, on pourra obtenir la paramétrisation par une rotation et une mise à l'échelle.

Comment trouver les bons $\lambda_{i,j}$

On itère le procédé suivant pour chaque sommet i de \mathcal{G} :

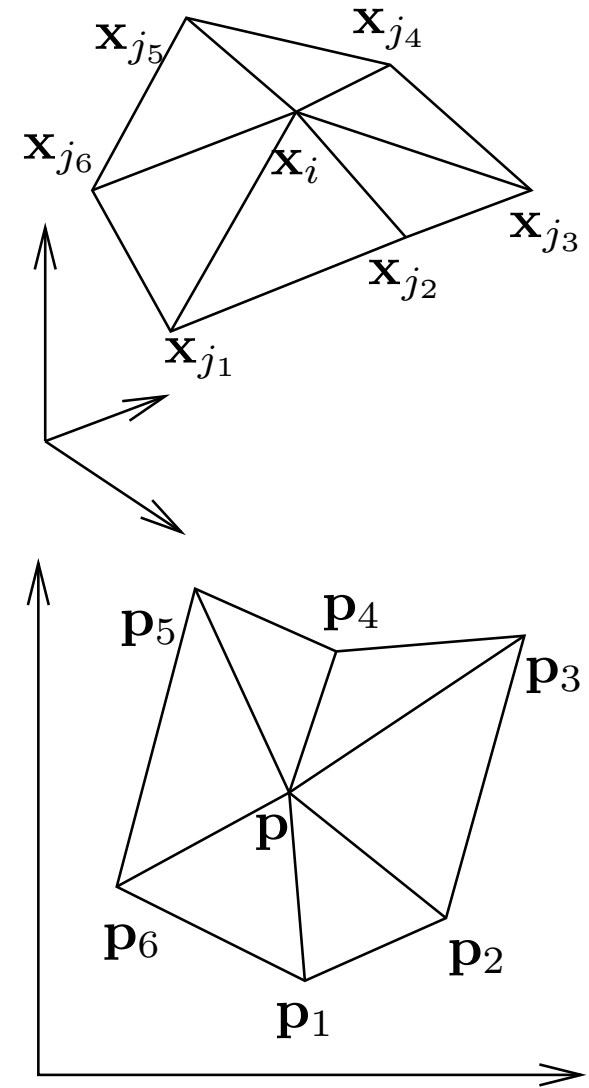
- On considère \mathcal{G}_i , le sous-graphe de \mathcal{G} composé du nœud i et de ses voisins $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_{d_i}}$.



Comment trouver les bons $\lambda_{i,j}$

On itère le procédé suivant pour chaque sommet i de \mathcal{G} :

- On considère \mathcal{G}_i , le sous-graphe de \mathcal{G} composé du nœud i et de ses voisins $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_{d_i}}$.
- On projette les $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_{d_i}}$ en, resp., $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i$ en préservant la forme de \mathcal{S} localement autour de \mathbf{x}_i .

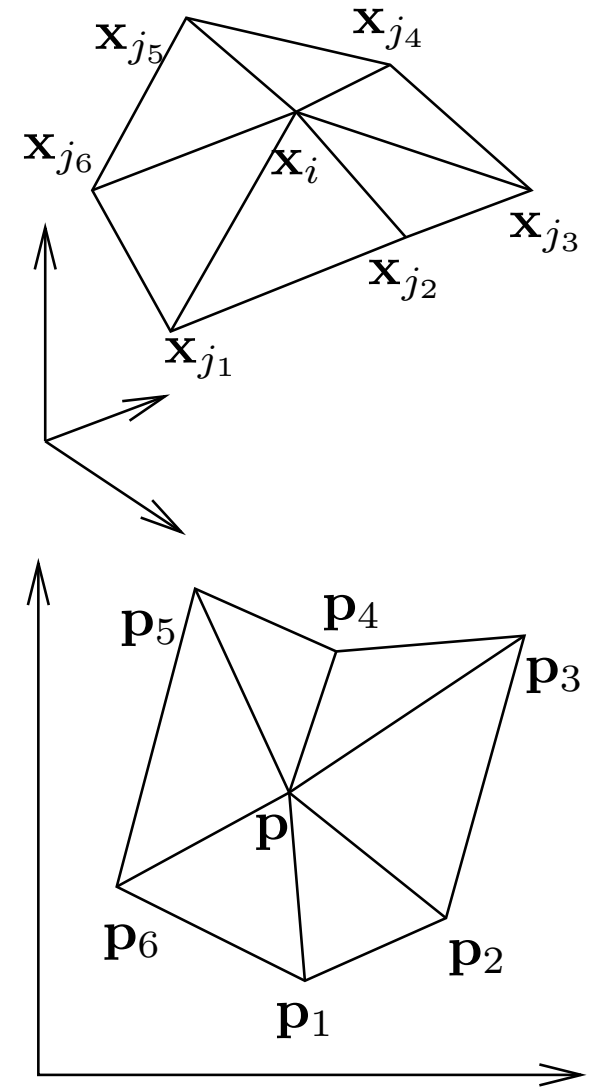


Comment trouver les bons $\lambda_{i,j}$

On itère le procédé suivant pour chaque sommet i de \mathcal{G} :

- On considère \mathcal{G}_i , le sous-graphe de \mathcal{G} composé du nœud i et de ses voisins $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_{d_i}}$.
- On projette les $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_{d_i}}$ en, resp., $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i$ en préservant la forme de \mathcal{S} localement autour de \mathbf{x}_i .
- On choisit des $\lambda_{i,j}$ tels que

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{d_i} \lambda_{i,j_k} \mathbf{p}_k.$$



Plaquer \mathbf{x}_i et ses voisins dans un plan

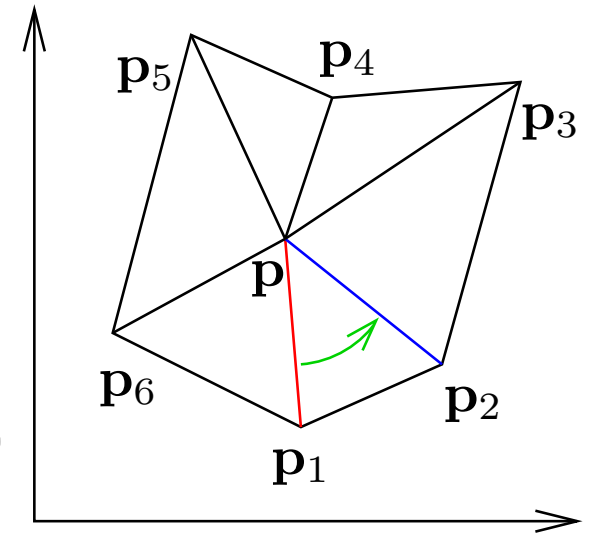
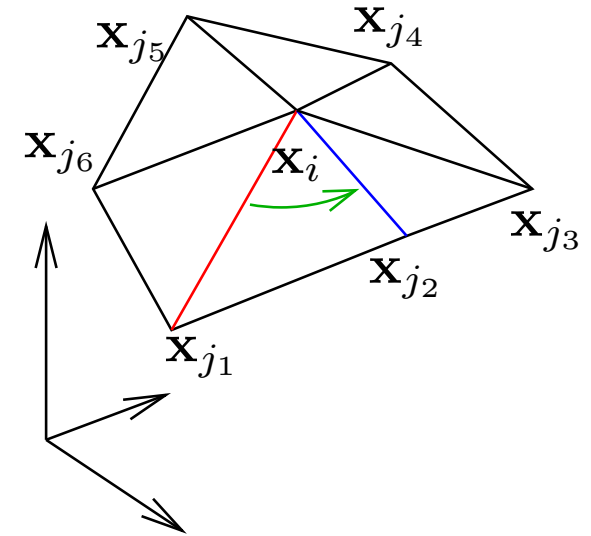
- On préserve les distances du point central à ses voisins :

$$\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}\| = \|\mathbf{x}_{j_k} - \mathbf{x}_i\|$$

- On préserve les rapports d'angles :

$$\theta_i = \sum_{k=1}^{d_i} \text{ang}(\mathbf{x}_{j_k}, \widehat{\mathbf{x}_i}, \mathbf{x}_{j_{k+1}})$$

$$\text{ang}(\mathbf{p}_k, \widehat{\mathbf{p}}, \mathbf{p}_{k+1}) = \frac{2\pi}{\theta_i} \text{ang}(\mathbf{x}_{j_k}, \widehat{\mathbf{x}_i}, \mathbf{x}_{j_{k+1}})$$

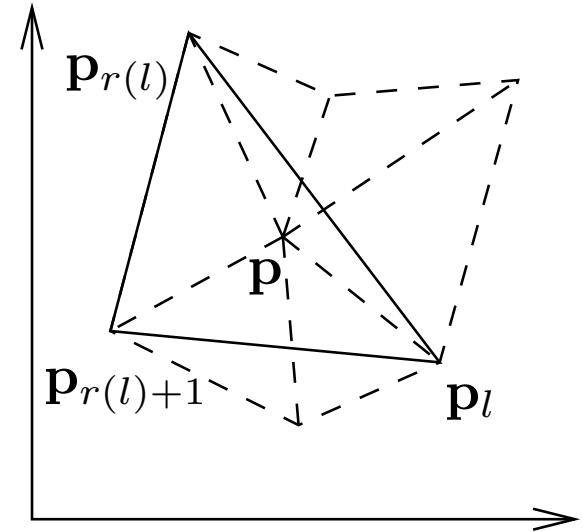


Calculer les $\lambda_{i,j}$

- Si $d_i = 3$, il existe un unique triplet $(\lambda_{i,j_1}, \lambda_{i,j_2}, \lambda_{i,j_3})$ tel que $\mathbf{p} = \lambda_{i,j_1} \mathbf{p}_1 + \lambda_{i,j_2} \mathbf{p}_2 + \lambda_{i,j_3} \mathbf{p}_3$

Calculer les $\lambda_{i,j}$

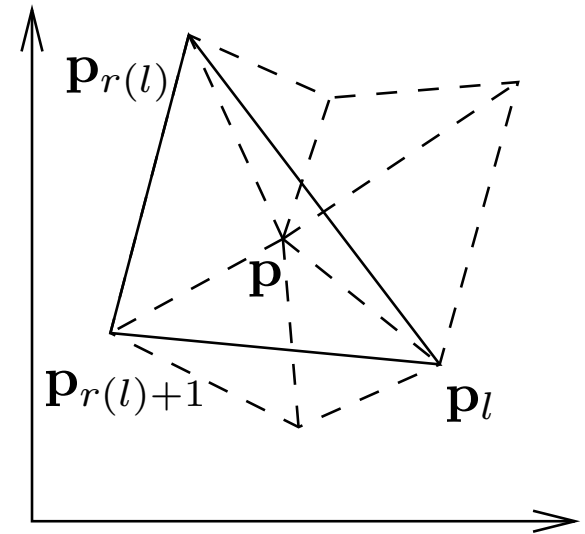
- Si $d_i = 3$, il existe un unique triplet $(\lambda_{i,j_1}, \lambda_{i,j_2}, \lambda_{i,j_3})$ tel que $\mathbf{p} = \lambda_{i,j_1} \mathbf{p}_1 + \lambda_{i,j_2} \mathbf{p}_2 + \lambda_{i,j_3} \mathbf{p}_3$
- Si x_i a plus de trois voisins, on considère pour chaque l de $1, \dots, d_i$:
 - le point \mathbf{p}_l ;
 - l'indice $r(l)$ tel que le triangle $(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_{r(l)}, \mathbf{p}_{r(l)+1})$ contienne le point \mathbf{p} ;



Calculer les $\lambda_{i,j}$

- Si $d_i = 3$, il existe un unique triplet $(\lambda_{i,j_1}, \lambda_{i,j_2}, \lambda_{i,j_3})$ tel que $\mathbf{p} = \lambda_{i,j_1} \mathbf{p}_1 + \lambda_{i,j_2} \mathbf{p}_2 + \lambda_{i,j_3} \mathbf{p}_3$
- Si x_i a plus de trois voisins, on considère pour chaque l de $1, \dots, d_i$:

- le point \mathbf{p}_l ;
- l'indice $r(l)$ tel que le triangle $(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_{r(l)}, \mathbf{p}_{r(l)+1})$ contienne le point \mathbf{p} ;
- on calcule les coordonnées barycentriques $(\mu_l^l, \mu_{r(l)}^l, \mu_{r(l)+1}^l)$ de \mathbf{p} dans ce triangle.

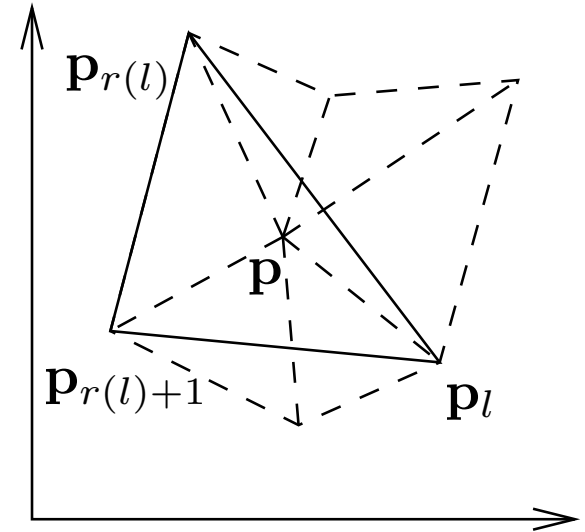


Calculer les $\lambda_{i,j}$

- Si $d_i = 3$, il existe un unique triplet $(\lambda_{i,j_1}, \lambda_{i,j_2}, \lambda_{i,j_3})$ tel que $\mathbf{p} = \lambda_{i,j_1} \mathbf{p}_1 + \lambda_{i,j_2} \mathbf{p}_2 + \lambda_{i,j_3} \mathbf{p}_3$

- Si x_i a plus de trois voisins, on considère pour chaque l de $1, \dots, d_i$:

- le point \mathbf{p}_l ;
- l'indice $r(l)$ tel que le triangle $(\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_{r(l)}, \mathbf{p}_{r(l)+1})$ contienne le point \mathbf{p} ;
- on calcule les coordonnées barycentriques $(\mu_l^l, \mu_{r(l)}^l, \mu_{r(l)+1}^l)$ de \mathbf{p} dans ce triangle.



- On prend pour $\lambda_{i,j_k} = \frac{1}{d_i} \sum_{l=1}^{d_i} \mu_k^l$

Mise en œuvre

- On répartit les sommets du contour $\mathbf{u}_{n_i+1}, \dots, \mathbf{u}_N$ sur une forme convexe par « longueur de corde »

Mise en œuvre

- On répartit les sommets du contour u_{n_i+1}, \dots, u_N sur une forme convexe par « longueur de corde »
- Pour chaque sommet interne i , on calcule les $\lambda_{i,j}$ pour $j : (i, j) \in E$ par somme pondérée de coordonnées barycentriques

Mise en œuvre

- On répartit les sommets du contour $\mathbf{u}_{n_i+1}, \dots, \mathbf{u}_N$ sur une forme convexe par « longueur de corde »
- Pour chaque sommet interne i , on calcule les $\lambda_{i,j}$ pour $j : (i, j) \in E$ par somme pondérée de coordonnées barycentriques
- On résoud le système :

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{i,j} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, n_i.$$

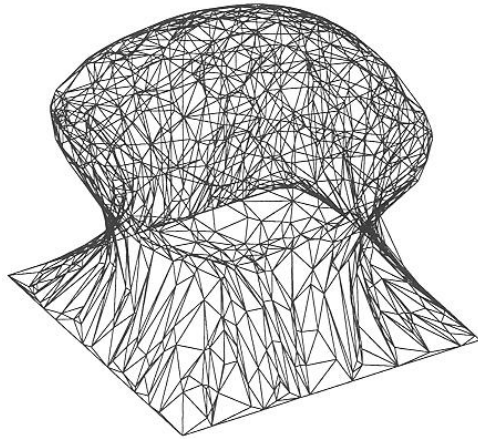
Mise en œuvre

- On répartit les sommets du contour $\mathbf{u}_{n_i+1}, \dots, \mathbf{u}_N$ sur une forme convexe par « longueur de corde »
- Pour chaque sommet interne i , on calcule les $\lambda_{i,j}$ pour $j : (i, j) \in E$ par somme pondérée de coordonnées barycentriques
- On résoud le système :

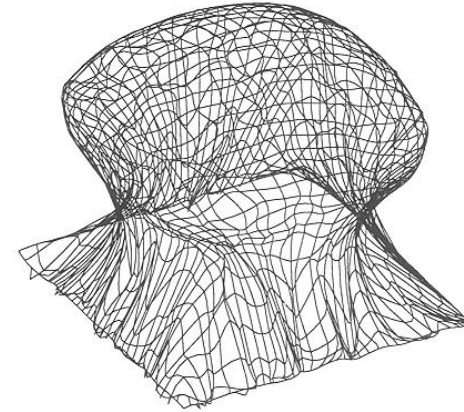
$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{i,j} \mathbf{u}_j, \quad i = 1, \dots, n_i.$$

- On cherche une fonction lisse satisfaisant $s(\mathbf{u}_i) = \mathbf{x}_i$.

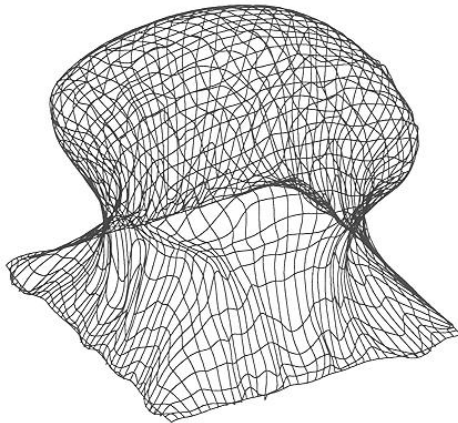
Résultats



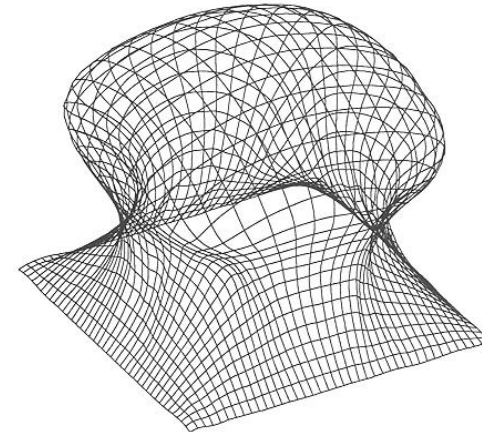
Surface triangulée initiale



Paramétrisation uniforme

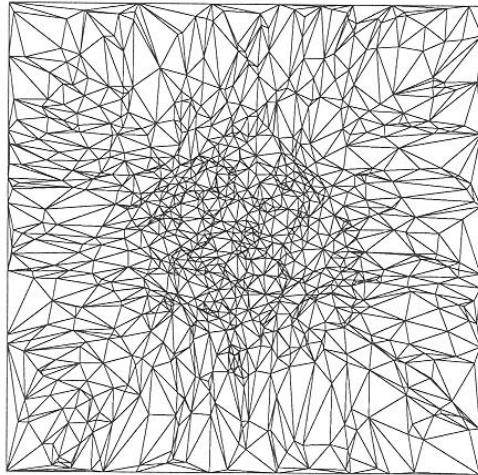


Paramétrisation somme pondérée
de carrés

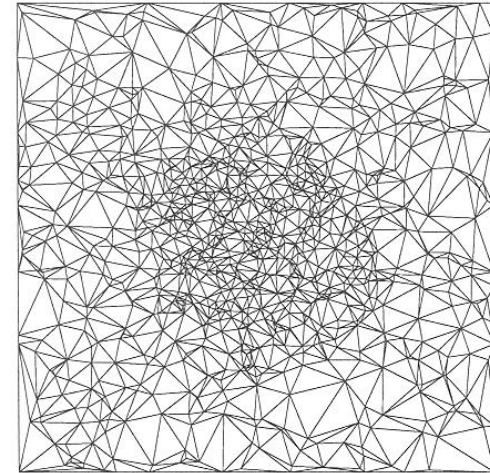


Paramétrisation conservant la
forme

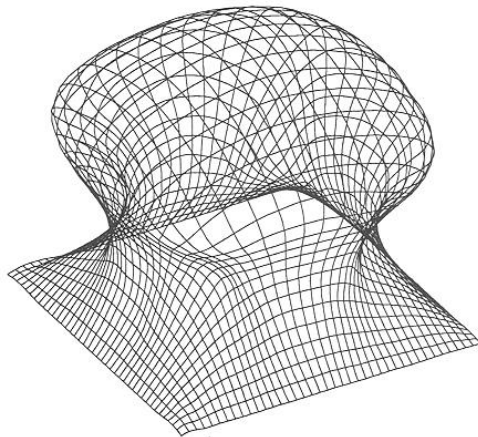
Exploitation des résultats



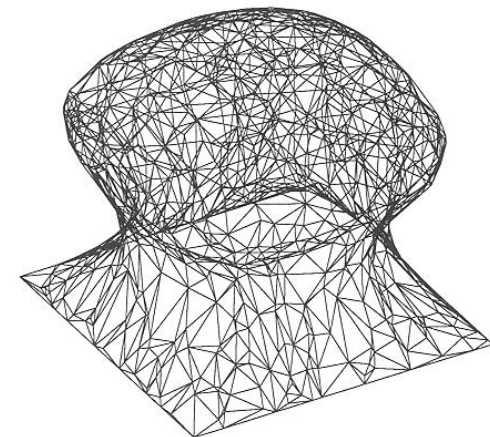
Paramétrisation conservant la
forme



Retriangulation (Delaunay)



Nouvelle approximation de la
surface



Retriangulation de la surface

Conclusion

- Approche plus géométrique que calculatoire du problème du choix de la paramétrisation
- Résultats convaincants
- Souplesse pour la forme de la frontière (cercle unité, carré unité)
- Permet de retriangler des surfaces en transmettant de bonnes propriétés à la nouvelle triangulation